4 Exercice — 35′ — 6 Points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(2,0,1), B(0,2,1) et C(1,2,0) .

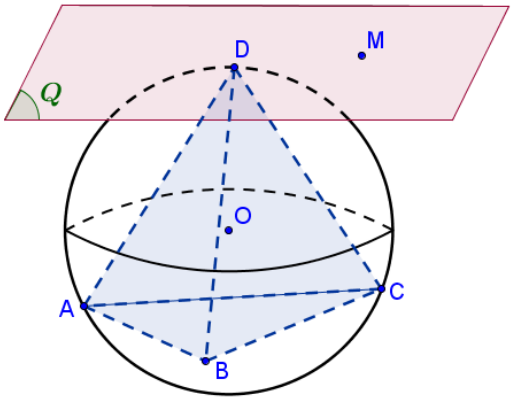
1°) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Déduire que les points *A*, *B* et *C* déterminent un plan P dont une équation cartésienne est : $x+y+z-3=0$.

2°) Soit la sphère S d'équation $x^2+y^2+z^2=5$.

a) Vérifier que *A*, *B* et *C* sont des points de la sphère S.

b) Déduire alors l'intersection de la sphère S avec le plan P.



3°) Soit le point *D* de coordonnées $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$.

On désigne par Q le plan passant par *D* et parallèle au plan P.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q.

b) Montrer que Q est tangent à la sphère S au point *D*.

4°) Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace n'appartenant pas à P.

a) Calculer $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\bullet\overrightarrow{AM}$.

b) Montrer que le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre *MABC* est égal à $\frac{|x+y+z-3|}{3}$

c) En déduire que pour tout point *M* du plan Q ; $\mathcal{V}=\sqrt{\frac{5}{3}}-1$.

5 Exercice — 30′ — 5 Points

Dans l'espace muni un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(4,0,0)$, $B(0,4,0)$ et $C(0,0,4)$.

1°) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Déduire que les points *A*, *B* et *C* déterminent un plan P dont une équation cartésienne est : $x+y+z-4=0$.

c) Montrer que l'aire du triangle *ABC* est égale à $8\sqrt{3}$.

2°) Soit le point $G\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

a) Montrer que le point *G* est le centre de gravité du triangle *ABC*.

b) Montrer que [*OG*] est la hauteur issue de *O* du tétraèdre *OABC*.

3°) On donne les points *I*, *J* et *K* milieux respectifs des segments [*AC*], [*AB*] et [*BC*].

a) Justifier que : $\overrightarrow{KI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ et que $\overrightarrow{KI}\wedge\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire l'aire du triangle *IJK*.

4°) On désigne respectivement par $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ les volumes des tétraèdres *OABC* et *OIJK*.

Montrer que : $\mathcal{V}'=\frac{1}{4}\mathcal{V}$.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn